158. 束ノ直和ト正規いでやる

（広島文理大）前 田 文 友

0. I. ヲモツ 束 L ニ於テ，L ノ任意ノ元 a ガ

$$a = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_n , \quad a_i \in L(0, z_i) \ (i = 1, \cdots, n)$$

ノ如ク 一意的ニアラワサレルトキ，L ハ $L(0, z_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ ノ直和デアルトイウ. コノトキ z_i $(i = 1, \cdots, n)$ ハ L ノ中心元デアル. コノ直和ノ概念ハ I ノ存在ヲ仮定シテイル. 本稿デハ I ノ存在ヲ仮定シナイ場合ノ直和ヲ定義シ、コレニ関聯シテ I ノ存在ヲ仮定シナイ連続幾何学 即チ一般連続幾何学ニ於テハ、正規いでやるガ中心元ノ代リヲナシテイルコトヲ示シ、一般連続幾何学ニ於テモ、次元函数及ビ準類表現ガ連続幾何学ノ場合ト殆ド同様ニ成立スルコトヲ示ス.

§1. 束ノ直和分解

本節ニ於テハ L ハ 0 ヲモツ束トスル.

<u>定義 1.1.</u> L ニ於テ，$a \cap b = 0$ ニシテ，スベテノ $x \in L$ ニ対シテ $(a, x, b)D$ ナルトキ 即チ $(a \cup x) \cap b = (a \cap b) \cup (x \cap b) = x \cap b$ ナルトキ，$a \nabla b$ デアラワス.

$S \subseteq L$ ナルトキ，スベテノ $b \in S$ ニ対シテ $a \nabla b$ ナルガ如キ a ノ全体ヲ S^{∇} デアラワス. 同時ニ $a \nabla b$ ニシテ $b \nabla a$ ナルトキ，a ト b トハ <u>分離</u>シテイルトイフ.

〔注意 1.1〕 L ガ模束ナルトキハ，$(a, x, b)D$ ナラバ $(b, x, a)D$

デアルカラ. $a \nabla b$ ナラバ $b \nabla a$ デアル.

<u>補題 1.1</u>　$S \subseteq L$ ナルトキ, S^{∇} ハ L ノ いでやる デアル.

〔証〕(i)　$a_1, a_2 \in S^{\nabla}$ トスレバ. スベテノ $s \in S$, $x \in L$ ニ対シテ

$a_1 \cap s = 0$,　$a_2 \cap s = 0$,　$(a_1 \cup x) \cap s = x \cap s$,

$(a_2 \cup x) \cap s = x \cap s$ デアル、従ッテ

$$(a_1 \cup a_2) \cap s = a_2 \cap s = 0$$

$$(a_1 \cup a_2 \cup x) \cap s = (a_2 \cup x) \cap s = x \cap s$$

デアルカラ. $a_1 \cup a_2 \in S^{\nabla}$ デアル.

(ii) 次ニ $a \in S^{\nabla}$, $a_1 \leq a$ トスレバ.

$a_1 \cap s \leq a \cap s = 0$,　$(a_1 \cup x) \cap s = (a_1 \cup x) \cap (a \cup x) \cap s$.

$$= (a_1 \cup x) \cap x \cap s = x \cap s$$

デアルカラ $a_1 \in S^{\nabla}$.　故ニ S^{∇} ハ L ノ いでやる デアル.

<u>定義 1.2</u>　L ノ 0 ヲ含ム部分集合 $S_1, \cdots\cdots, S_n$ ガアッテ

(1°)　L ノ任意ノ元 a ハ

$$a = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

ノ如ク アラワサレ.

(2°)　$i \neq j$ ナラバ　$S_j \leq S_i^{\nabla}$,

ナルトキ. $L = S_1 \oplus \cdots\cdots \oplus S_n$ トカキ, コレヲ L ノ<u>直和分解</u>トイヒ, S_i $(i=1, \cdots\cdots, n)$ ヲ L ノ<u>直和因子</u>トイウ.

〔注意 1.2〕　定義 1.2 ノ (2°) ハ. $i \neq j$ ナラバ S_i ノ元ト S_j ノ元ト ガ分離シテイルコトヲ示ス.

<u>補題 1.2</u>　L ノ直和分解 $L = S_1 \oplus \cdots\cdots \oplus S_n$ ニ於テ, L ノ元 a ニ対シテ

$$a = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_n, \qquad a_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n) \qquad (1)$$

ナル アラワシ方ハ一意的デアル.

〔証〕 (1) ノ他ニ

$$a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_n, \quad b_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

ナル アラワシ方ガアルトスル. 補題 1.1 ヨリ $b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_n \in S_1^{\nabla}$ デアルカラ

$$a_1 = a \cap a_1 = \{b_1 \cup (b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_n)\} \cap a_1 = b_1 \cap a_1.$$

即チ $a_1 \leqq b_1$. 同様ニシテ $b_1 \leqq a_1$ デアルカラ $a_1 = b_1$.

一般ニ $a_i = b_i \quad (i=1, \cdots, n)$ デアル.

補題 1.3　L ノ直和因子ハ L ノ いでやるデアル.

(証) $L = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ ヲ L ノ直和分解トスル. $x, y \in S_1$ トスレバ

$$x \cup y = a_1 \cup \cdots \cup a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

デアル　$i=2, \cdots, n$ ナルトキ. $x, y \in S_i^{\vee}$ デアルカラ.

$$a_i = (x \cup y) \cap a_i = y \cap a_i = 0$$

故ニ $x \cup y = a_1 \in S_1$.

$x \in S_1$, $y \leqq x$ トスレバ

$$y = b_1 \cup \cdots \cup b_n, \quad b_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

デアル.

$i=2, \cdots, n$ ナルトキ $b_i \leqq y \leqq x$ ニシテ.

$b_i \nabla x$ デアルカラ $b_i = 0$.

故ニ $y = b_1 \in S_1$ デアル. 従ッテ S_1 ハ L ノ いでやるデアル.

定理 1.1　$L = L_1 \cdots L_n$ デアルナラバ. $[0_1, \cdots, 0_{i-1}, a_i^*, 0_{i+1}, \cdots, 0_n]$ トアラワセバ L ノ任意ノ元 $a = [a_1^*, \cdots, a_n^*]$ ハ

$$a = a_1 \cup \cdots \cup a_n, \quad a_i \in S_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

ノ如クアラワサレ. $i \neq j$ ナラバ $a_i \cap a_j = 0$ ニシテ.

$x = [x_1^*, \cdots, x_n^*]$ トスルトキ

$$(a_i \cup x) \cap a_j = [0_1, \cdots, 0_{j-1}, x_j^* \cap a_j^*, 0_{j+1}, \cdots, 0_n]$$
$$= x \cap a_j$$

デアルカラ $a_i \nabla a_j$　従ッテ $S_i \leqq S_i^{\vee}$ デアル.

故ニ $L = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ ハ直和分解デアル.

(ii) $L = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ ヲ L ノ直和分解トスレバ. 補題 1.3 ヨリ $S_1, \cdots, S_n$ ハ L ノ 部分束デアッテ 補題 1.2 ヨリ L ノ 任意ノ元ハ 一意的ニ $a = a_1 \cup \cdots \cup a_n$ $(a_i \in S_i)$ ノ如クアラワサレル. 故ニ $a \to [a_1, \cdots, a_n]$ ニヨッテ L ト積 $S_1 \cdots S_n$ トノ間ニハ 一対一ノ対応ガ存在スル. 次ニ $a \leqq b$ ナラバ $a = a_1 \cup \cdots \cup a_n$, $b = b_1 \cup \cdots \cup b_n$ $(a_i, b_i \in S_i)$ トスルトキ $b_2 \cup \cdots \cup b_n \in S_1^{\nabla}$ デアルカラ

$$a_1 = b \cap a_1 = \{b_1 \cup (b_2 \cup \cdots \cup b_n)\} \cap a_1 = b_1 \cap a_1.$$

従ッテ $a \leqq b_1$　一般ニ $a_i \leqq b_i$ $(i=1, \cdots, n)$.

逆ニ $a_i \leqq b_i$ $(i=1, \cdots, n)$ ナラバ $a \leqq b$ デアルカラ.

上ノ対応ハ ソノ順序ヲ保ツ．故ニ L ト $S_1 \cdots S_n$ トハ同型デアル．

補題 1.4.　$L = S_1 \oplus S_2$ ヲ直和分解トスレバ．$S_1 = S_2^\nabla$, $S_2 = S_1^\nabla$ デアル．

〔証〕 定義ニヨリ $S_1 \leqq S_2^\nabla$ デアル．$a \in S_2^\nabla$ トスレバ

$$a = a_1 \cup a_2, \quad a_1 \in S_1, \quad a_2 \in S_2$$

ニ於テ $a \nabla a_2$ デアルカラ，$a_2 = a \cap a_2 = 0$．故ニ $a = a_1 \in S_1$.

従ッテ $S_1 = S_2^\nabla$ デアル．同様ニ $S_2 = S_1^\nabla$

補題 1.5.　S ヲ L ノ直和因子トスレバ．$L = S \oplus S^\nabla$ ハ L ノ直和分解デアル．

〔証〕 $L = S \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ ナラバ，定理 1.1 ノ証明 (iii) ヨリ $a_1 \cup \cdots \cup a_n$ $(a_i \in S_i)$ ノ和クアラワサレル．L ノ元ノ全体ヲ T トスレバ．L ハ積 ST ト同型デアル．故ニ 定理 1.1 ノ逆ヨリ $L = S \oplus T$ ハ直和分解デアル．従ッテ 補題 1.4 ヨリ $T = S^\nabla$ デアル．

補題 1.6.　$L = L(0, z) \oplus L(0, z)^\nabla$ ガ L ノ直和分解デアルナラバ，z ハ L ノ中立元デアル．

〔証〕 定理 1.1 ヨリ L ハ積 $L(0, z)\, L(0, z)^\nabla$ ト同型デアッテ．z ハ $[1_1, 0_2]$ ニ対応スルカラ z ハ L ノ中立元デアル．（中山正氏．束論 I. 14）

補題 1.7.　相対補束 L ニ於テ．z ヲ L ノ中立元トスレバ，$L = L(0, z) \oplus L(0, z)^\nabla$ ハ L ノ直和分解デアル．

〔証〕 $S = (b;\, b \cap z = 0)$ トオクトキ，$a \in L(0, z)$．$b \in S$，$x \in L$ トスレバ　$a \cap b \leqq z \cap b = 0$

$$(a \cup x) \cap b = (a \cup x) \cap (z \cup x) \cap b = (a \cup x) \cap x \cap b = x \cap b$$

デアルカラ $a \nabla b$．故ニ $L(0, z) \leqq S^\nabla$．又

$$(b \cup x) \cap a = (b \cup x) \cap z \cap a = x \cap z \cap a = x \cap a$$

デアルカラ $b \nabla a$　故ニ $S \leqq L(0, z)^\nabla$．又 $x \in L$ ニ対シテ，

$x = (x \cap z) \cup y$ ナルヲヲトレバ $x \cap z \in L(0, z)$.

又 $y \cap z = y \cap x \cap z = 0$ デアルカラ $y \in S$. 故ニ

$L = L(0.z) \oplus S$ ハ直和分解デアル. 補題 1.4 ヨリ $S = L(0.z)^{\nabla}$デアル.

〔注意1.2〕 0.1 ヲモツ束 L ニ於テ. $L = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ ガ 直和分解デアルナラバ $S_i = L(0, z_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ ナルガ如キ $z_i \in L$ ガ存在スル ナントナレバ 定義ニヨリ $1 = z_1 \cup \cdots \cup z_n$ $(z_i \in S_i)$ ノ如クアラワサレル. $a \in S_1$ トスレバ, $z_2 \cup \cdots \cup z_n \in S_1^{\nabla}$ デアルカラ.

$$a = \{z_1 \cup (z_2 \cup \cdots \cup z_n)\} \cap a = z_1 \cap a \leqq z_1$$

シカルニ. 補題 1.3 ヨリ S_1 ハ L ノ いでやる デアルカラ $S_1 = L(0, z_1)$. 同様ニシテ $S_i = L(0.z_i)$ $(i = 2, \cdots, n)$ デアル. 即チ. 本節ニ定義シタ 0 ヲモツ束 L ノ直和分解ハ 更ニ L ガ I ヲモツトキハ. L ノ中心元ヲ用イテノ 直和分解ニナッテイル.

§2. 條件的完備束ノ準直和分解

<u>定義 2.1.</u> 束 L_α $(\alpha \in I)$ ノ積 $\pi(L_\alpha; \alpha \in I)$ ノ元ヲ $a = [a_\alpha; \alpha \in I]$ $(a_\alpha \in L_\alpha)$ トスルトキ $\varphi_\alpha(a) = a_\alpha$ トオク. 今 $\pi(L_\alpha; \alpha \in I)$ ノ部分束 L_0 ガアルトキ. スベテノ $\alpha \in I$ ニ対シテ φ_α ガ L_0 ヨリ L_α ノ上ヘノ準同型寫像デアルトキ. L_0 ヲ L_α $(\alpha \in I)$ ノ <u>準積</u> トイイ. $L_0 = \pi^*(L_\alpha : \alpha \in I)$ デアラワス. 一ツノ束 L ガ 準積 $\pi^*(L_\alpha : \alpha \in I)$ ト同型デアルトキ. L ハ L_α $(\alpha \in I)$ ノ準積デ<u>表現</u>サレルトイウ

<u>定義 2.2.</u> 條件的完備束 L ニ於テ. 有向集合 D ノ元 δ ヲ添字トスル L ノ部分集合 $(a_\delta; \delta \in D)$ ガ アッテ

$$a_\delta \uparrow a \quad \text{ナルトキ} \quad a_\delta \cap b \uparrow a \cap b$$

ナラバ. L ヲ<u>條件的上連続束</u>トイウ. 双対的ニ

$$a_\delta \downarrow a \quad \text{ナルトキ} \quad a_\delta \cup b \downarrow a \cup b$$

ナラバ. L ヲ <u>條件的下連続束</u> トイウ. L ガ條件的上連続シテ. 同時ニ條件的下連続束ナルトキ L ヲ <u>條件的連続束</u>トイウ.

---

(1) $(a_\alpha; \alpha \in I) L$ ナルトキ $\vee(a_\alpha; \alpha \in I)$ ヲ $\vee(\oplus a_\alpha; \alpha \in I)$ トカク

0ヲモツ條件的上連続相対補模束ヲ 一般上連続補模束 トイイ．0ヲモツ條件的連続相対補模束ヲ 一般連続補模束（或ハ 一般連続幾何学）トイフ．

一般(上)連続補模束ガ単位元1ヲモテバ (上)連続補模束デアル．

以下 本節ニ於テモ 束Lハ 0ヲモツモノトスル．

定義 2.3 條件的完備束L ノ0ヲ含ム部分集合ノ族$(S_\alpha;\alpha\in I)$ガアッテ

(1°) Lノ任意ノ元 aハ

$$a=\bigvee(a_\alpha;\alpha\in I),\qquad a_\alpha\in S_\alpha\quad(\alpha\in I)$$

ノ如ク アラワサレ、

(2°) $\alpha\neq\beta$ ナラバ．$S_\beta\subseteq S_\alpha^\nabla$．

ナルトキ，$L=\sum^*(\oplus S_\alpha;\alpha\in I)$ トカキ，コレヲ Lノ 準直和分解 トイイ，$S_\alpha(\alpha\in I)$ヲ Lノ 準直和因子 トイウ．更ニ任意ノ $a_\alpha\in S_\alpha$ $(\alpha\in I)$ ニ対シテ $\bigvee(a_\alpha;\alpha\in I)$ ガ存在シ．Lニ属スルトキハ，$L=\sum(\oplus S_\alpha;\alpha\in I)$ トカキ コレヲLノ直和分解トイウ．

補題 2.1． Lヲ條件的上連続束トスル，

(i) $a_\delta\nabla b$ $(\delta\in D)$，$a_\delta\uparrow a$ ナラバ $a\nabla b$ デアル．

(ii) $S\subseteq L$ ナルトキ，S^∇ ノ部分集合ノ結ガ存在スルナラバ，ソレハ S^∇ ニ属スル

(iii) Lノ準直和因子ハ Lノ條件的完備部分束デアル．

[証]

(i) $a_\delta\nabla b$ デアルカラ，$x\in L$ ニ対シテ $a_\delta\wedge b=0$，

$(a_\delta\vee x)\wedge b=x\wedge b$ 故ニ 上連続性カラ $a\wedge b=0$．

$(a\vee x)\wedge b=x\wedge b$ 即チ，$a\nabla b$ デアル．

(ii) $T\subseteq S^\nabla$ ニシテ $s=\bigvee(a;a\in T)$ ガ存在スルトキ，νヲTノ任意ノ有限部分集合トシ，$s_\nu=\bigvee(a;a\in\nu)$ トオケバ，$s_\nu\uparrow s$ デアル． 補題1.1，ヨリ $s_\nu\in S^\nabla$ デアルカラ，スベテノ $b\in S$ ニ対シテ $s_\nu\nabla b$．従ッテ (i) ヨリ $s\nabla b$．即チ $s\in S^\nabla$デアル．

(iii) $L=\sum^*(\oplus S_\alpha;\alpha\in I)$ ヲ Lノ準直和分解トスル． S_αガLノ イデアル デアルコトハ，補題 1.3 ト同様ニ証明サレル． $T\subseteq S_\alpha$ ニシテ $s=\bigvee(a;a\in T)$ ガ存在スルトキ，(ii)ノ如ク $s_\nu=\bigvee(a;a\in\nu)$ トオケバ $s_\nu\uparrow s$ デアル．

$s_1 = \vee(a_\alpha ; \alpha \in I)$ $(a_\alpha \in S_\alpha)$ トスレバ，$s_\gamma \in S_\alpha$ デアルカラ βキα ナラバ $s_\gamma \nabla a_\beta$．故ニ(i)ヨリ $s \nabla a_\beta$．シカルニ $a_\beta \leqq s$ デアルカラ $a_\beta = 0$ 即チ $s = a_\alpha \in S_\alpha$ デアル．
交ニツイテハ S_α ガ いでやる デアルコトカラ当然成立スル．

<u>補題 2.2</u> 條件的上連續束 L ノ 準直和分解 $L = \Sigma^*(\oplus S_\alpha ; \alpha \in I)$ ニ於テ，L ノ元 a ニ対シテ

$$a = \vee(a_\alpha ; \alpha \in I), \qquad a_\alpha \in S_\alpha \ (\alpha \in I)$$

ナル アラワシ方ハ 一意的デアル．

（証） 補題 2.1 (ii) ヲ用イテ，補題 1.2 ト同様ニ証明サレル．

<u>定理 2.1</u> 條件的完備束 L_α $(\alpha \in I)$ ，零元ヲ 0_α トスルトキ，$L = \Pi(L_\alpha ; \alpha \in I)$ ノ元 $[a_\alpha^* ; \alpha \in I]$ ノ中 $\alpha \neq \beta$ ナラバ $a_\alpha^* = 0_\alpha$ ナルガ如キ 元ノ全体ヲ S_β トスレバ，L ノ直和分解 $L = \Sigma(\oplus S_\alpha ; \alpha \in I)$ ガ存在スル．逆ニ條件的上連續束 L ハ 準直和分解 $L = \Sigma^*(\oplus S_\alpha ; \alpha \in I)$ ガ アルトキハ L ハ 準積 $\Pi^*(S_\alpha ; \alpha \in I)$ ト條件的完備束トシテ 同型デアル．

（証） (i) 定理ノ前半ノ証明ハ，定理 1.1 ノ証明(i)ト同様デアル．

(ii) 定理ノ後半ハ補題 2.2 ヨリ $a \in L$ ハ一意的ニ

$$a = \vee(a_\alpha ; \alpha \in I), \qquad a_\alpha \in S_\alpha \ (\alpha \in I) \tag{1}$$

ノ如クアラワサレルカラ，$\Pi(S_\alpha ; \alpha \in I)$ ノ元ノ中，(1) ナル関係ニヨリ a ニ対応スル元 $[a_\alpha ; \alpha \in I]$ ノ全体ヲ L_0 トスレバ，補題2.1 ヲ用イテ 定理 1.1 ノ証明 (ii) ト同様ニシテ $L \cong L_0$ トガ條件的完備束トシテ同型デアルコトガ証明サレル．

<u>定義 2.4</u> 條件的上連續束 L ノ 準直和分解 $L = \Sigma^*(\oplus S_\alpha ; \alpha \in I)$ ガアルトキ，$\bar{L} = \Pi(S_\alpha ; \alpha \in I)$ ニ於テ 相対応スル元ヲ同一視シテ $\bar{L} = \Sigma(\oplus S_\alpha ; \alpha \in I)$ トカキ，$\bar{L}$ ヲ L ノ <u>拡大束</u>トイフ．

§3. 一般上連続補元束ノ正規いでやる

<u>補題 3.1</u> 0ヲモツ 相対補元束ニ於テハ 次ノ 2命題 (α),(β) ハ同等デアル．

(α) $a \nabla b$.
(β) $a_1 \leqq a$, $b_1 \leqq b$, $a_1 \sim b_1$ ナラバ $a_1 = b_1 = 0$

(註) v. Neumann 連続幾何学講義 I, 42 Theorem 5.7.

<u>補題 3.2</u>　一般上連続補模束ニ於テ, $a \wedge b = 0$, $a \approx b$ ナラバ $a \sim b$ デアル.

(註) v. Neumann and Halperin. Annals of math. 41 (1940) 93. ト同様

<u>補題 3.3</u>　一般上連続補模束 L ニ於テ, $S \leqq L$ トスレバ, S^{∇} ハ L ノ中立いでやる デアッテ, S^{∇} ノ部分集合ノ結ガ存在スルトキハ, ソレハ S^{∇} ニ属スル. 次ニ $a \in S^{\nabla}$, $a \sim c$ トスル. $b \in S$ ニ対シテ $c_1 \leqq c$, $b_1 \leqq b$, $c_1 \sim b_1$ ナル b_1, c_1 ガアルトキハ, $a \sim c$ デアルカラ $c_1 \sim a_1 \leqq a$ ナル a_1 ガ存在スル. $a_1 \wedge b_1 \leqq a \wedge b = 0$ デアルカラ 補題 3.2 ヨリ $a_1 \sim b_1$. シカルニ $a \nabla b$ デアルカラ 補題 3.1 ヨリ $b_1 = 0$. 従ッテ $c \nabla b$ デアルカラ $c \in S^{\nabla}$. 故ニ S^{∇} ハ中立いでやる デアル.

(ii) L ガ上連続補模束ナルトキ, $z = \vee(a; a \in S^{\nabla})$ トオケバ (i) ヨリ $z \in S^{\nabla}$ デアル. $z \sim c$ トスレバ (i) ヨリ $c \in S^{\nabla}$ デアルカラ $c \leqq z$. 従ッテ $c = z$ デアルカラ z ハ L ノ中心元デアル.

<u>定義 3.1</u>　0 ヲモツ 模束 L ノ部分集合 S ニ於テ, $S = S^{\nabla\nabla}$ ナルトキ, S ヲ L ノ <u>正規いでやる</u> トイウ.

<u>補題 3.4</u>, S ヲ 一般上連続補模束 L ノ <u>正規いでやる</u> トスレバ, $L = S \oplus S^{\nabla}$ ハ L ノ直和分解デアル.

(証) 任意ノ $x \in L$ ニ対シテ $x_S = \vee(x \wedge a; a \in S)$, $x = x_S \oplus x_S'$ ナル x_S, x_S' ヲトレバ, 補題 3.3 ヨリ $x_S \in S$ デアル. 又 任意ノ $a \in S$ ニ対シテ $x_1 \leqq x_S'$, $a_1 \leqq a$, $x_1 \sim a_1$ トスレバ, S ハ 中立いでやるデアルカラ $x_1 \in S$. 従ッテ $x_1 = x \wedge x_1$ デアルカラ $x_1 \leqq x_S$ 故ニ $x_1 \leqq x_S \wedge x_S' = 0$ デアルカラ 補題 3.1 ヨリ $x_S' \nabla a$. 即チ $x_S' \in S^{\nabla}$. 従ッテ $L = S \oplus S^{\nabla}$ ハ 直和分解デアル.

<u>定理 3.1</u>, 一般上連続補模束 L ガ既約デアルタメノ必要ニシテ充分ナル条件ハ, (0) ト L 以外ニ L ノ正規いでやる ガ存在シナイコトデアル.

(証) (i) 必要　(0) 及ビ L ト異ナル L ノ 正規いでやる S ガ存在スレバ,

補題 3.4 ヨリ $L = S \oplus S^{\nabla}$ ハ L ノ直和分解デアル．定理 1.1 ヨリ L ハ 積 SS^{∇} ト同型デアルカラ L ハ可約デアル

(ii) 充分．L ガ可約ナラバ，L ハ二ツ以上ノ元ヲモツ束 L_1，L_2 ノ積トシテアラワサレル．L_1，L_2 ニ対応スル L ノ部分束ヲ S_1，S_2 トスレバ，定理 1.1 ヨリ直和分解 $L = S_1 \oplus S_2$ ガ存在シ，補題 1.4 ヨリ S_1，S_2 ハ L ノ正規いでやるデアッテ、コレハ (0) 及ビ L トハ異ナル．

<u>定理 3.2</u>　一般上連続補模束 L ノ正規いでやるノ全体 Z ハ集合トシテノ包含関係ヲ順序トシテ完備ぶーる束デアル

(証)　$S \to S^{\nabla\nabla}$ ハ閉演算デアルカラ Z ハ完備束デアル．Z ニ於テ $S \wedge S^{\nabla} = (0)$ ニシテ，補題 3.4 ヨリ $S \vee S^{\nabla} = L$ デアルカラ S^{∇} ハ S ノ補元デアル．次ニ S, T ヲ二ツノ正規いでやるトシ，$S \wedge T = (0)$ トスル．$T \lneqq S^{\nabla}$ トスレバ，$a \in T$，$a \notin S^{\nabla}$ ナル $a \in L$ ガアル．コノ a ニ対シテ $a \nabla b$ デナイ $b \in S$ ガ存在スル．補題 3.1 ヨリ $0 < a_1 \leqq a$，$0 < b_1 \leqq b$，$a_1 \sim b_1$ ナル a_1，b_1 ガ存在スル．シカルトキハ 補題 3.3 ヨリ $a_1 \in S$．他方 $a_1 \in T$ デアルカラ $S \wedge T = (0)$ ニ矛盾スル．故ニ $S \wedge T = (0)$ ナラバ $T \leqq S^{\nabla}$ デアルカラ Z ハぶーる束デアル．(小笠原藤次郎氏著 束論 II，5 定理 1 ヨリ)

<u>補題 3.5</u>　一般上連続補模束 L ニ於テ $L(0, z)$ ガ L ノ正規いでやるデアルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ z ガ L ノ中立元デアルコトデアル．

(証) (i)　z ヲ L ノ中立元トスレバ，補題 1.7 ヨリ $L = L(0, z) \oplus L(0, z)^{\nabla}$ ハ L ノ直和分解デアル．従ッテ 補題 1.4 ヨリ $L(0, z)$ ハ L ノ正規いでやるデアル．

(ii) $L(0, z)$ ガ L ノ正規いでやるトスレバ 補題 3.4 ヨリ $L = L(0, z) \oplus L(0, z)^{\nabla}$　L ノ直和分解デアル．従ッテ，補題 1.6 ヨリ z ハ L ノ中立元デアル．

<u>定理 3.3.</u>　一般上連続補模束 L ニ於ケル正規いでやるノ全体 Z ニ於テ，$L(0, z)$ ノ如クアラワサレル正規いでやるノ全体ハ Z ノいでやるデアッテ、L ノ中立元ノ全体カラナル L ノ部分束 Z_0 ト同型デアル．

(証) (i) 補題 3.5 ヨリ，L ノ中立元ノ全体 Z_0 ト $L(0, z)$ ノ如クアラワサレル正規いでやるノ全体 Z_0 トハ $z \longleftrightarrow L(0, z)$ ナル関係ニヨッテ一対一

ノ対応ヲスル. 次ニ Z_1, Z_2 ヲ二ツノ中立元トスレバ. $Z_1 \cup Z_2$, $Z_1 \wedge Z_2$ モ中立元デアル. $L(0,Z_1)$, $L(0,Z_2)$ ヲ含ム正規いでやるハ $Z_1 \cup Z_2$ ヲ含ムカラ

$$L(0,Z_1) \vee L(0,Z_2) \geqq (0, Z_1 \cup Z_2)$$

$L(0,Z_1) \vee L(0,Z_2) \leqq L(0,Z_1 \cup Z_2)$ ハ明ラカデアルカラ

$$L(0,Z_1) \vee L(0,Z_2) = L(0,Z_1 \cup Z_2)$$

又 $L(0,Z_1) \wedge L(0,Z_2)$ ハ $L(0,Z_1)$ ト $L(0,Z_2)$ トノ共通部分デアルカラ

$$L(0,Z_1) \wedge L(0,Z_2) = L(0,Z_1 \wedge Z_2)$$

故ニ Z_0 ト $\mathfrak{Z}_0$ トハ同型デアル.

(iii) Z ニ於テ $S \equiv L(0,Z)$ トスレバ. $Z_1 = V(a\,;\, a \in S)$ ガ存在シ. 補題3.3ヨリ S ニ属スル.

故ニ $S = L(0,Z_1)$ デアルカラ, $\mathfrak{Z}_0$ ハ Z ノいでやるデアル.

定理3.4 一般上連続補模系 L ノ中立元ノ全体ヲ Z_0 トスルトキ $Z_0^{\nabla\nabla} = L_1$, $Z_0^{\nabla} = L_\infty$ トオケバ. $L = L_1 \oplus L_\infty$ ハ L ノ直和分解デアッテ, L_∞ ハ 0以外ニハ中立元ヲモタズ. 又 L_1 ハ L ノ中立元ヲ中立元トスルガ如キ 上連続補模系 $\bar{L}_1$ ニ埋蔵セラレル.

(証) Z_0^{∇} ハ L ノ正規いでやるデアルカラ. 補題3.4ヨリ $L = L_1 \oplus L_\infty$ ハ L ノ直和分解デアル.

$L_\infty = Z_0^{\nabla}$ ガ0以外ニ L ノ中立元ヲ含マナイコトハ明ラカデアル. シカルニ直和分解ノ性質カラ L_∞ ノ中立元ハ L ノ中立元デアルカラ. L_∞ ハ0以外ニ中立元ヲモタナイ. $L_1 = Z_0^{\nabla\nabla}$ ハ L ノスベテノ中立元ヲ含ム最小ノ正規いでやるデアルカラ. 補題3.5ヨリ. Z ニ於テ $L_1 = V(L(0,z)\,;\, z \in Z_0)$ デアル 定理3.3カラ $L(0,Z)\,(Z \in Z_0)$ ニ含マレル正規いでやるハ $L(0,Z_1)\,(Z_1 \in Z_0)$ ノ如クアラワサレルカラ. v. Neumann 連続幾何学講義 II, 32 Lemma 33 ヲ Z ニ適用スレバ. $L_1 = V(\oplus L(0,Z_\lambda)\,;\, \lambda \in I)$ $(Z_\lambda \in Z_0)$ ノ如クアラワサレル. $L_1 = \sum^{*}(\oplus L(0,Z_\lambda)\,;\, \lambda \in I)$ ハ L_1 ノ準直和分解デアルカラ. L_1 ノ 拡大系 $\bar{L}_1 = \sum(\oplus L(0,Z_\lambda)\,;\, \lambda \in I)$ ハ $V(\oplus Z_\lambda\,;\, \lambda \in I)$ ヲ単位元トシテモツ 上連続補模系デアッテ.

L_1 ノ中立元 z ニハ $\bar{L}_1$ ノ中心元 $z = V(\oplus(z \wedge Z_\lambda)\,;\, \lambda \in I)$ ガ対応スル.

§4. 一般連続幾何学ノ次元函数ト乗積表現

一般連続幾何学即チ 一般連続補積束Lノ正規いでやるノ全体Zハ 定理3-2カラ完備ぶーる束デアルガ、Lガ単位元ヲモツ場合 即チLガ連続補積束ノトキハ、補題3・3ヨリ Z ハ L ノ中心 Z =迄トラナイ. シカシテ補題3・4ヨリ正規いでやる S ニ対シテ、任意ノ元 $x \in L$ ハ $x = x_S \oplus x_S'$, $x_S \in S$, $x_S' \in S^{\nabla}$ ナル形ニ一意的ニアラワサレル. x_S ハ x ノ S ニ於ケル成分デアッテ. コレヲ Sx デアラワセバ

$$S(x \cup y) = Sx \cup Sy, \quad S(x \cap y) = Sx \cap Sy, \quad (S_1 \cup S_2)x = S_1 x \cup S_2 x,$$

$$(S_1 \cap S_2)x = S_1 x \cap S_2 x$$ デアル. 即 Sa ナル演算ハ連続補積束ノ場合ハ中心元 z ヲ用イル $z \cap a$ ナル演算ニ対応シテイル. 尚中心包 $e(a)$ ニ対シテハ、a ヲ含ム最小ノ正規いでやる $a^{\nabla\nabla}$ ヲ考エレバヨイ.

カクノ如クシテ 連続補積束ノ場合ノ中心元ノ代リニ一般連続補積束ノ場合ハ正規いでやるヲ用ウレバ、連続補積束ノ場合ノ次元函数及ビ埋蔵定理 其論ハ殆ンドソノママ 一般連続補積束ニ対シテモ成立スル. 以下特ニ注意ヲ要スル点ノミヲ述ベル.

一般連続補積束 L ニ於テ, $a \neq 0$ ニシテ $x \ll a$ ナラバ $x = 0$ ナルトキ. a ヲ L ノ 最低元 ト定義スル. スベテノ最低元 a ヲトッタトキノ 正規いでやる $a^{\nabla\nabla}$ ノ全体ノ結ヲ L_{I} トシ. Z ニ於ケル L_{I} ノ補元ヲ L_{II} トスレバ. $L = L_{\mathrm{I}} \oplus L_{\mathrm{II}}$ デアル. L_{I} ノ拡大束 $\overline{L}_{\mathrm{I}}$ ニ対シテ $h^{\nabla\nabla} = \overline{L}_{\mathrm{I}}$ ナルガ如キ $\overline{L}_{\mathrm{I}}$ ノ最低元ガアル. コレヲ $\overline{L}_{\mathrm{I}}$ ノ 基最低元 トイウ.

定理3・4カラ $L = L_1 \oplus L_\infty$ デアルカラ, $L_{\mathrm{II}_1} = L_1 \cap L_{\mathrm{II}}$, $L_{\mathrm{I}\infty} = L_\infty \cap L_{\mathrm{I}}$, $L_{\mathrm{II}\infty} = L_\infty \cap L_{\mathrm{II}}$ トオケバ.
$L = (L_1 \cap L_{\mathrm{I}}) \oplus L_{\mathrm{II}_1} \oplus L_{\mathrm{I}\infty} \oplus L_{\mathrm{II}\infty}$ ハ L ノ直和分解デアル.

0ヲモツ補積束 L ニ於テ $e^{\nabla\nabla} = L$ ナルガ如キ $e \in L$ ガ存在スルトキハ、e ヲ L ノ 準単位元 トイウ. 準単位元ハ一ツトハ限ラナイ. L ガ単位元ヲモテバ. 単位元ハ準単位元デアル 一般連続補積束 L ニ対シテハ, Z ニ於テ $L = V(a^{\nabla\nabla}; a \in L)$ デアルカラ, V. Neumann 連続幾何学講義 III, 32 Lemma 3.3 ヲ Z ニ適用スレバ $L = V(\oplus a_\lambda^{\nabla\nabla}; \lambda \in I)$ ノ如クアラワサレル.

$e = V(\oplus a_\lambda; \lambda \in I)$ ハ L ノ拡大束 $\overline{L} = \Sigma(\oplus a_\lambda^{\nabla\nabla}; \lambda \in I)$ ノ準単位元デアル.

SヲLノ正規いでやるトスレバ、$\bar{S} = \sum(\oplus(S \cap a_\alpha^{(\cdot)}) : \alpha \in I)$ ハ$\bar{L}$ノ正規いでやるデアル。逆ニ$\bar{S}$ヲ$\bar{L}$ノ正規いでやるトスレバ、$\bar{S}$ニ含マレルLノ元ノ全体SハLノ正規いでやるデアル。コノ対応ニヨッテLノ正規いでやるノ全体$\mathbf{Z}$ト$\bar{L}$ノ正規いでやるノ全体$\bar{\mathbf{Z}}$トハ完備ぶーる束トシテ同型デアル。

今後ハ一般連続補模束$L = L_1 \oplus L_{I\infty} \oplus L_{II\infty}$ノ拡大束$\bar{L}$ノ準単位元eトシテハ、$\bar{L}_1$ノ単位元$e_1$、$\bar{L}_{I\infty}$ノ基本低元$\hat{e}_\infty$、$\bar{L}_{II\infty}$ノアル準単位元$e_{II\infty}$ノ和即チ

$$e = e_1 \oplus \hat{e}_\infty \oplus e_{II\infty} \qquad (1)$$

ヲトルモノトスル。

$\bar{S}$ヲ$\bar{L}$ノ任意ノ正規いでやるトスルトキ、$\bar{S}e$ノ如クアラワサレル$\bar{L}$ノ元ヲ$\bar{L}$ノ準中心元トイイ、準中心元ノ全体$\bar{Z}$ヲ$\bar{L}$ノ準中心トイウ。$\bar{Z}$ハ$\bar{L}$ノ完備ぶーる部分束デアッテ、$\bar{S} \to \bar{S}e$ナル対応ニヨッテ、$\bar{Z}$、従ッテ$\mathbf{Z}$ト同型デアル。

$\bar{L}$ノ準単位元eトシテ(1)ノ如クトッタカラ、定理3・4カラLノ中立元ハ$\bar{L}$ノ準中心元デアリ、$L_{I\infty}$ニ於ケル最低元ハ$\bar{L}$ノ準中心元ト配景的デアル。

v. Neumann 連続幾何学講義 II 34 *Theorem* 3.2 ノ如クシテ

$L_1 \cap L_I = \sum_{1 \leq k < \infty} \oplus L_{I_k}$ デアル。従ッテ

$$L = \sum_{1 \leq k < \infty}^{*} \oplus L_{I_k} \oplus L_{II_1} \oplus L_{I\infty} \oplus L_{II\infty}$$

トナル。

$\mathbf{Z}$, $\bar{\mathbf{Z}}$, $\bar{Z}$ハ同型ナ完備ぶーる束デアルカラ、コレ等ノ極大いでやるヲ同一文字$\mathfrak{p}$デアラワシ、ソノ全体ヲΩトスレバ、$S \in \mathbf{Z}$ニ対シテSヲ含マナイ極大いでやる$\mathfrak{p}$ノ全体$E(S)$ヲ対応サセバ、$\mathbf{Z}$ハ表現ぶーる空間Ω上ノ集合束デぶーる束トシテ同型ニ表現サレル。

シカルトキハ$a \in \bar{L}$ニ対シテΩノ上デ定義セラレタ連続函数$\delta_a(\mathfrak{p})$ガ定マリ、ソノ値域ハ

$\mathfrak{p} \in E(L_{I_k})$ ニ於テハ $(\frac{n}{k} : n = 0, 1, \ldots, k)$

$\mathfrak{p} \in E(L_{II_1})$ 〃 $(\lambda ;\ 0 \leq \lambda \leq 1$, λハ実数$)$

$\mathfrak{p} \in E(L_{I\infty})$ 〃 $(n ;\ n = 0, 1, \ldots)$

$\mathfrak{p} \in E(L_{II\infty})$ 〃 $(\lambda ;\ 0 \leq \lambda < \infty$, λハ実数$)$

デアル. 尚 $\bar{L}$ ノ準中心元 z ニ対シテ

$$z \notin p \text{ ナラバ } \delta_z(p)=1, \quad z \in p \text{ ナラバ } \delta_z(p)=0$$

トナリ 他ノ $\delta_a(p)$ ノ性質ハ 連続補模束ノトキト同様デアル.

既約ナ (I_∞)型 一般連続幾何学ノ具体的例トシテハ, Veblen-Young ノ射影幾何学ノ公理 A, E0 ヲ満足スル k-空間 ($k=-1,0,1,2,\cdots$) ノ全体デアル.

一般連続幾何学ノ準積表現ニツイテハ, 河田・松島・樋口三氏ノ方法 (本誌 264 (昭19)) ガ 殆ンド ソノママ適用サレル.